2 第十三次作业

13.1：试讨论 $\mathbb{R}^3$ 中 Gauss 曲率 $K=-1$ 的曲面与 sine-Gordon 方程的解的一一对应关系：$\alpha_{st}=\sin\alpha$。

Proof. (1) $\mathbb{R}^3$ 上 Gauss 曲率 $K=-1$ 的曲面满足 sine-Gordon 方程。因为 $K=\kappa_1\kappa_2=-1$，所以主曲率不重，从而曲面没有脐点，进而可以取曲率线参数 (u,v) 使得 $\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}$，设 $A=\sqrt{E},B=\sqrt{G}$，计算 1-形式和联络形式：

$$\omega_1=A\mathrm{d}u,\quad \omega_2=B\mathrm{d}v;\quad \omega_{12}=-\frac{A_v}{B}\mathrm{d}u+\frac{B_u}{A}\mathrm{d}v$$

根据曲面结构方程，由 Codazzi 方程导出：

$$\begin{cases}\omega_{13}=\kappa_1\omega_1=\kappa_1A\mathrm{d}u\\ \omega_{23}=\kappa_2\omega_2=\kappa_2B\mathrm{d}v\end{cases}\xrightarrow{\text{Codazzi}}\begin{cases}A_v(\kappa_1-\kappa_2)+A(\kappa_1)_v=0\\ B_u(\kappa_2-\kappa_1)+B(\kappa_2)_u=0\end{cases}\xrightarrow{\kappa_1=\tan\varphi}\begin{cases}\frac{A_v}{\sin\varphi}+\frac{A\varphi_v}{\cos\varphi}=0\\ \frac{-B_u}{\cos\varphi}+\frac{B\varphi_u}{\sin\varphi}=0\end{cases}\longrightarrow\left(\frac{A}{\cos\varphi}\right)_v=0=\left(\frac{B}{\sin\varphi}\right)_u$$

所以存在坐标变换（Jacobian 矩阵非退化）

$$(u,v)\mapsto(\xi(u),\eta(v))=\left(\int_0^u\mathrm{d}\left(\frac{A}{\cos\varphi}(u)\right),\int_0^v\mathrm{d}\left(\frac{B}{\sin\varphi}(v)\right)\right),\quad\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix}\frac{A}{\cos\varphi}&0\\0&\frac{B}{\sin\varphi}\end{bmatrix}(u,v)$$

由 Gauss 方程 $\mathrm{d}\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2=\omega_1\wedge\omega_2$ 导出：

$$\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta=\mathrm{d}\left[-\frac{A_v\cos\varphi}{AB}\mathrm{d}\xi+\frac{B_u\sin\varphi}{AB}\mathrm{d}\eta\right]=(\varphi_{\xi\xi}-\varphi_{\eta\eta})\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta$$

换元 $\xi=s+t,\eta=s-t,\varphi=\alpha/2$ 得到

$$\alpha_{st}=2(\varphi_{\xi t}\xi_s+\varphi_{\eta t}\eta_s)=2(\varphi_{\xi\xi}\xi_s\xi_t+\varphi_{\xi\eta}\xi_s\eta_t+\varphi_{\eta\eta}\eta_s\eta_t+\varphi_{\eta\xi}\eta_s\xi_t)=2(\varphi_{\xi\xi}-\varphi_{\eta\eta})=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin\alpha$$

所以我们说明了 $K=-1$ 的常 Gauss 曲率曲面对应一个 sine-Gordon 方程的解。

(2) 反过来，对于满足 sine-Gordon 方程的 $\mathbb{R}^3$ 上的标量函数 α，按照先前的定义，采用 φ,ξ,η 的参数表示，给出如下结构方程（容易验证这是相容的），因此对任意 sine-Gordon 方程的解，都能对应回一个 $K=-1$ 的常 Gauss 曲率曲面

$$\omega_1=\cos\varphi\mathrm{d}\xi,\ \omega_2=\sin\varphi\mathrm{d}\eta;\quad\omega_{12}=\varphi_\eta\mathrm{d}\xi+\varphi_\xi\mathrm{d}\eta;\quad\omega_{13}=\sin\varphi\mathrm{d}\xi,\ \omega_{23}=-\cos\varphi\mathrm{d}\eta$$

(3) 先从 α 到曲面，再到 α，这样复合两次对应后是恒等映射。先从曲面到 α，再到曲面，这两个曲面参数变换到统一的 (ξ,η) 参数网下时是一致的，所以也是恒等映射的。综上，一一对应。 □

13.2：设 Σ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维超曲面，$\boldsymbol{r}$ 为位置向量，$\boldsymbol{n}$ 为单位法向量场，H 为平均曲率函数，Δ 为 Σ 的 Laplace 算子。证明：$\Delta\boldsymbol{r}=nH\boldsymbol{n}$。

Proof. 任取固定的常向量 $\boldsymbol{a}$，定义 $f=\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}\rangle$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f=f_i\omega_i=\langle\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{a}\rangle\omega_i\quad&\Longrightarrow f_{ij}\omega_j=\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}\rangle h_{ij}\omega_j+\langle\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{a}\rangle\omega_{ij}+f_j\omega_{ji}=\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}\rangle h_{ij}\omega_j\\&\Longrightarrow f_{ij}=\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}\rangle h_{ij}\end{aligned}$$

则 $\Delta f=n\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}\rangle H$，其中 H 是 1-次平均曲率，再由 $\boldsymbol{a}$ 的任意性得证。 □

13.3：用题目 **13.2** 证明：$\mathbb{R}^{n+1}$ 中不存在 n 维紧致极小超曲面。

Proof. 极小超曲面指的是 1-次平均曲率 $H=0$ 的超曲面。因为 $\Delta \boldsymbol{r}=0$，所以 $\boldsymbol{r}$ 的坐标函数是 Σ 上的调和函数，由最大模原理，知道 $|\boldsymbol{r}|$ 只在边界取到最大值，而 Σ 无边紧致，没有边界，但存在最大值，从而 $\boldsymbol{r}$ 是常数，矛盾。 □

13.4：设 Σ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的具有常平均曲率的紧致曲面，$\boldsymbol{r}$ 为其位置向量，$\boldsymbol{n}$ 为其单位法向量，$z=u+iv$ 是曲面的局部等温坐标。证明 Hopf 微分 $\Psi=\langle \boldsymbol{r}_{zz},\boldsymbol{n}\rangle(\mathrm{d}z)^2$ 满足

- Ψ 是 Σ 上整体定义的 2-微分形式，即与 z 的选取无关；
- Ψ 是 Σ 上的全纯微分形式；
- 对 $P\in\Sigma$，$\Psi(P)=0$ 当且仅当 P 点为脐点。

Proof. (1) Hopf 微分 Ψ 与局部等温坐标系的选取无关。设 $w=x+iy$ 是 Σ 的另一个与 $z=u+iv$ 定向一致的局部等温坐标，$w=w(z)$ 是它们间的坐标变换，则 w 是 z 的解析函数，因为

$$\tilde{\lambda}^2(x,y)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)=\tilde{\lambda}^2(u,v)[(x_u^2+y_u^2)\mathrm{d}u^2+(x_uy_v+x_vy_u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(x_v^2+y_v^2)\mathrm{d}v^2]\implies\begin{cases}x_u^2+y_u^2=\lambda^2(u,v)=x_v^2+y_v^2\\ x_uy_v+x_vy_u=0\end{cases}$$

计算可知，$w_{\bar{z}}=0$，则

$$\Psi=-\langle \boldsymbol{r}_w,\boldsymbol{n}_w\rangle(\mathrm{d}w)^2=-\langle \boldsymbol{r}_z,\boldsymbol{n}_z\rangle\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^2(\mathrm{d}w)^2=-\langle \boldsymbol{r}_z,\boldsymbol{n}_z\rangle(\mathrm{d}z)^2$$

(2) 曲面 Σ 具有常平均曲率当且仅当它的 Hopf 微分 Ψ 是全纯二次微分。由 $\{\boldsymbol{r}_z,\boldsymbol{r}_{\bar{z}},\boldsymbol{n}\}$ 下的运动方程，则曲面必须满足路径无关，即可积性条件，只看 $\boldsymbol{r}_{z\bar{z}z}=\boldsymbol{r}_{zz\bar{z}}$：

$$\left(\frac{\lambda^2}{2}H\boldsymbol{n}\right)_z=(2(\ln\lambda)_z\boldsymbol{r}_z+Q\boldsymbol{n})_{\bar{z}}$$

$$\iff\quad\left(\frac{\lambda^2}{2}H\right)_z\boldsymbol{n}+\frac{\lambda^2}{2}H\left(-H\boldsymbol{r}_z-\frac{2}{\lambda^2}Q\boldsymbol{r}_{\bar{z}}\right)=2(\ln\lambda)_{z\bar{z}}\boldsymbol{r}_z+2(\ln\lambda)_z\frac{\lambda^2}{2}H\boldsymbol{n}+Q_{\bar{z}}\boldsymbol{n}+Q(-H\boldsymbol{r}_{\bar{z}}-\frac{2}{\lambda^2}\bar{Q}\boldsymbol{r}_z)$$

比较 $\boldsymbol{n}$ 的系数知道，$Q_{\bar{z}}=\frac{\lambda^2}{2}H_z=0$，所以 Q 是关于 z 全纯的。

(3) $\Psi(P)=0$，当且仅当 $Q\mathrm{d}z^2=\langle \boldsymbol{r}_{zz},\boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}z^2=0$，展开成 $z=u+iv$ 有

$$0=\frac{1}{4}\langle \boldsymbol{r}_{uu}-2i\boldsymbol{r}_{uv}-\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{n}\rangle(\mathrm{d}u^2+2i\mathrm{d}u\mathrm{d}v-\mathrm{d}v^2)=\frac{1}{4}(L-N-2iM)(\mathrm{d}u^2+2i\mathrm{d}u\mathrm{d}v-\mathrm{d}v^2)$$

比对实虚部的系数得到

$$(L-N)(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2)+4M\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0=(L-N)\mathrm{d}u\mathrm{d}v-M(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2)$$

比对微分形式的系数得到 $L=N,M=0$，而等温参数下 $E=G,F=0$，所以这是一个脐点。 □

13.5：证明 Hopf 定理：设 Σ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致曲面，如果 Σ 的亏格为零，且平均曲率为常数，则 Σ 是球面。

Proof. 由平均曲率为常数，知道 Hopf 微分 $Q(\mathrm{d}z)^2$ 是全纯的 2-微分形式；只要证明 $\Psi\equiv0$，就能说明曲面为 $\mathbb{R}^3$ 空间的全脐点曲面，再由紧致推出曲面只能为球面。Riemann-Koebe 单值化定理指出，亏格为零的紧致 Riemann 曲面共性等价于球面 $\mathbb{S}^2$，所以只需证明 $\mathbb{S}^2$ 上的全纯 2-微分形式为零，就能说明 $\Psi\equiv0$。不妨设任意 ψ 是 $\mathbb{S}^2$ 上全纯的 2-微分形式，在球极投影下

$$\begin{cases}\pi_1:\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,1)\}\to\mathbb{R}^2 & \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)\mapsto(u,v)\\ \pi_2:\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,-1)\}\to\mathbb{R}^2 & \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},-\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\mapsto(x,y)\end{cases}$$

通过验证，$(u,v),(x,y)$ 确实都是等温参数，所以设 $z=u+iv, w=x+iy$，且等温坐标系在重叠部分的变换关系为 $z=w^{-1}$，而进一步在重叠部分上，有（因为 Q 在曲面上整体定义，不依赖于局部等温参数的选取）

$$\psi=Q_1(z)(\mathrm{d}z)^2=Q_2(w)(\mathrm{d}w)^2=Q_2(w(z))\frac{1}{z^4}(\mathrm{d}z)^2 \implies Q_1(z)=\frac{Q_2(w(z))}{z^4}$$

令 $z\to\infty$，则 $w\to 0$，这说明

$$\lim_{z\to\infty}Q_1(z)=Q_2(0)\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^4}=0$$

所以 $Q_1(z)$ 在 $\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,1)\}\cong\mathbb{C}$ 上全纯有界，由 Liouville 定理知道 $Q_1\equiv 0$，同理 $Q_2\equiv 0$。从而 $\mathbb{S}^2$ 上的全纯 2-微分形式为零，由共形等价（在二维定向曲面中是双全纯等价）知道 $\Psi\equiv 0$。 □

13.6：证明 Alexsadrov 定理：设 Σ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 n 维嵌入紧致超曲面，即没有自交点，如果 Σ 的平均曲率为常数，则 Σ 是 n 维球面。

Proof. 由 M 紧致可知存在椭圆点 P_0（可取法向使 P_0 处主曲率均为正），则平均曲率 $H\equiv H(P_0)>0$，则

$$A(M)=\int_M \mathrm{d}A=\int_M H\varphi \mathrm{d}A=H\int_{\partial\Omega}\langle x,-N\rangle \mathrm{d}A=H\int_\Omega \mathrm{div}x\mathrm{d}V=H(n+1)|\Omega|$$

其中用到 Minkowski 公式和散度定理。从而

$$(n+1)|\Omega|=\int_M\frac{1}{H}\mathrm{d}A$$

即 Heintze-Karcher 不等式中取等，推出 M 为 n 维球面。 □

附：超曲面 Laplace 算子和外围空间 Laplace 算子的关系 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ 是紧致区域，其边界 $\partial\Omega=M=M^n$，设 N 为 M 上的内法向量场，设 $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ 为光滑函数，记

$$z=f|_M,\quad u=\frac{\partial f}{\partial N}|_M$$

则

$$(\overline{\Delta}f)|_M=\Delta z-nH\frac{\partial f}{\partial N}|_M+\frac{\partial^2 f}{\partial N\partial N}|_M$$

其中 $\overline{\Delta}$ 为 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ 上的 Laplace 算子，Δ 为 M 上的 Laplace 算子。

Proof. 以下记指标范围为 $1\le A,B,\ldots\le n+1$, $1\le i,j,\ldots\le n$，选取 $\{\overline{e}_A\}_{A=1}^{n+1}$ 为 Ω 的正交标架场，其中 $\overline{e}_{n+1}=N$（这里将 N 从边界上延拓到边界的邻域上，通过法向向内延拓一个邻域得到，这是由管状邻域定理保证的）。设 $\{\overline{\omega}_A\}$ 为其对偶标架场，记 $\omega_A=\overline{\omega}_A|_M$，且设 $\overline{\omega}_{i,n+1}|_M=h_{ij}\omega_j$。由协变微分的定义可知，在 M 上（$\overline{\omega}_{n+1}=0$），对于其切空间

$$\sum_i f_i|_M\omega_i=\left(\sum_A f_A\overline{\omega}_A\right)|_M=(\mathrm{d}f)|_M=\mathrm{d}f|_M=\sum_i z_i\omega_i \implies f_i|_M=z_i$$

根据 f_{AB} 的定义，有如下转化，令 $A=n+1$ 并限制在 M 上：

$$f_{AB}\overline{\omega}_B=\mathrm{d}f_A+f_B\overline{\omega}_{BA}\implies f_{n+1,B}\overline{\omega}_B=\mathrm{d}f_{n+1}+f_B\overline{\omega}_{B,n+1}\implies f_{n+1,i}|_M\omega_i=\mathrm{d}u+z_jh_{ji}\omega_i\implies f_{n+1,i}|_M=u_i+z_jh_{ji}$$

令 $A=i$，并限制在 M 上：

$$f_{iB}\overline{\omega}_B=\mathrm{d}f_i+f_B\overline{\omega}_{Bi}=\mathrm{d}f_i+f_j\omega_{ji}+f_{n+1}\overline{\omega}_{n+1,i}\implies f_{ij}|_M\omega_j=\mathrm{d}z_i+z_j\omega_{ji}-f_{n+1}|_Mh_{ij}\omega_j\implies f_{ij}|_M=z_{ij}-uh_{ij}$$

而在 Ω 中，由定义有

$$f_{n+1,n+1}=\frac{\partial^2 f}{\partial N\partial N}$$

所以加起来就是

$$(\overline{\Delta}f)|_M=\sum_A f_{AA}|_M=z_{ii}-uh_{ii}+\frac{\partial^2 f}{\partial N\partial N}=\Delta z-nH\frac{\partial f}{\partial N}|_M+\frac{\partial^2 f}{\partial N\partial N}|_M$$

□

附：Reilly 公式 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 为紧致区域，其边界为 $\partial\Omega = M^n$，$\mathrm{d}V$ 和 $\mathrm{d}A$ 分别为 Ω 和 M 上的体积元和面积圆，设 N 为 M 上的内法向量场。设 $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，记

$$z = f|_M, \quad u = \frac{\partial f}{\partial N}|_M$$

则

$$\int_\Omega ((\overline{\Delta} f)^2 - |\overline{\nabla}^2 f|^2)\mathrm{d}V = \int_M (-2u\Delta z + nHu^2 + h(\Delta z, \Delta z))\mathrm{d}A$$

其中 $\overline{\nabla}$ 为 Ω 上的联络，∇ 为 M 上的联络；$\overline{\nabla}^2$ 为 Ω 上的 Hessian 算子，$\overline{\Delta}$ 为 Ω 上的 Laplace 算子，Δ 为 M 上的 Laplace 算子；h 为 M 的第二基本形式。

Proof. 由于外围空间的计算

$$\frac{1}{2}\overline{\Delta}|\overline{\nabla} f|^2 = \frac{1}{2}\overline{\Delta} f_A^2 = f_{AB}^2 + f_A f_{ABB} = |\overline{\nabla}^2 f|^2 + f_A(\overline{\Delta} f)_A$$

代入，应用散度定理，代入超曲面

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_M \frac{\partial}{\partial N}|\overline{\nabla} f|^2\mathrm{d}A &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\langle\overline{\nabla}|\overline{\nabla} f|^2, -N\rangle\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}(\overline{\nabla}|\overline{\nabla} f|^2)\mathrm{d}V = \int_\Omega \frac{1}{2}\overline{\Delta}|\overline{\nabla} f|^2\mathrm{d}V = \int_\Omega \left(|\overline{\nabla}^2 f|^2 + f_A(\overline{\Delta} f)_A\right)\mathrm{d}V \\
&= \int_\Omega \left(|\overline{\nabla}^2 f|^2 - (\overline{\Delta} f)^2 + (f_A\overline{\Delta} f)_A\right)\mathrm{d}V \\
&= \int_\Omega \left(|\overline{\nabla}^2 f|^2 - (\overline{\Delta} f)^2\right)\mathrm{d}V + \int_\Omega \mathrm{div}(f_A\overline{\Delta} f)\mathrm{d}V = \int_\Omega \left(|\overline{\nabla}^2 f|^2 - (\overline{\Delta} f)^2\right)\mathrm{d}V + \int_M \langle (f_A)_A\overline{\Delta} f, -N\rangle\mathrm{d}A \\
&= \int_\Omega \left(|\overline{\nabla}^2 f|^2 - (\overline{\Delta} f)^2\right)\mathrm{d}V - \int_M \frac{\partial f}{\partial N}\overline{\Delta} f\mathrm{d}A \\
&= \int_\Omega \left(|\overline{\nabla}^2 f|^2 - (\overline{\Delta} f)^2\right)\mathrm{d}V - \int_M u\left(\Delta z - nHu + \frac{\partial^2 f}{\partial N\partial N}\right)\mathrm{d}A
\end{aligned}$$

另一方面，上式左端还可以展开计算

$$\frac{1}{2}\int_M \frac{\partial}{\partial N}|\overline{\nabla} f|^2\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\int_M \frac{\partial f_B^2}{\partial N}\mathrm{d}A = \int_M f_B f_{B,n+1}\mathrm{d}A = \int_M z_i(u_i + z_j h_{ji})\mathrm{d}A + \int_M u\frac{\partial^2 f}{\partial N\partial N}\mathrm{d}A$$

注意到在曲面没有边界，所以

$$0 = \int_M \mathrm{d}[z_i u\omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_n] = \int_M (z_{ii}u + z_i u_i)(-1)^{i+1}\mathrm{d}A$$

综上，相加得到结果。 □

附：Heintze-Karcher 不等式 设 M^n 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的紧致嵌入超曲面，其围成的区域为 Ω，体积记为 V。假设 $H > 0$，则

$$\int_M \frac{1}{H}\mathrm{d}A \geq (n+1)V$$

等式成立当且仅当 M 为 n 维球面。

Proof. 设 $f \in C^\infty(\Omega)$ 为 Dirichlet 问题的解

$$\begin{cases} \overline{\Delta} f = 1 & \text{in } \Omega \\ z = f|_M = 0 & \text{on } M \end{cases}$$

由散度定理知道

$$V=\int_\Omega \overline{\Delta} f \mathrm{d}V=-\int_M \frac{\partial f}{\partial N}\mathrm{d}A=-\int_M u\mathrm{d}A$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式知道，对于解 f 有

$$1=(\overline{\Delta} f)^2=(f_{AA})^2\le(n+1)(f_{AA})^2\le(n+1)|\overline{\nabla}^2 f|^2 \implies (\overline{\Delta} f)^2-|\overline{\nabla}^2 f|^2\le\frac{n}{n+1}$$

结合 Reilly 公式和解 f 的条件，知道

$$\frac{n}{n+1}V=\int_\Omega\frac{n}{n+1}\mathrm{d}V\ge\int_\Omega((\overline{\Delta} f)^2-|\overline{\nabla}^2 f|^2)=\int_M nHu^2\mathrm{d}A$$

因此结合上面式子

$$V^2=\left(\int_M u\mathrm{d}A\right)^2=\left(\int_M H^{-\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}u\mathrm{d}A\right)^2\le\int_M Hu^2\mathrm{d}A\int_M\frac{1}{H}\mathrm{d}A\le\frac{V}{n+1}\int_M\frac{1}{H}\mathrm{d}A$$

因此等式成立。此外，根据取等条件，这当且仅当 $\overline{\Delta} f=1$ 且 $\overline{\nabla}^2 f=\frac{I_{n+1}}{n+1}$，当且仅当 $f(x)=\frac{1}{2(n+1)}(|x-x_0|^2-a^2)$ 对某个 $x_0\in\mathbb{R}^{n+1}, a>0$ 成立。再根据 $f|_M=0$ 的条件知道 M 为 n 维球面。 □