1 第二十一次作业

21.1: 假设 $T:\ell^2\to\ell^2$ 使得 $T((x_i)_{i\geq 1})=(i^{-1}x_i)_{i\geq 1}$，则 $\mathrm{Ran}(T)$ 不是 ℓ^2 的闭子空间。

Proof. 因为 $\ker T=(0)$ 和如下事实
$$\frac{\|(0,\ldots,0,n,0,\ldots)\|_{\ell^2/\ker T}}{\|T(0,\ldots,0,n,0,\ldots)\|_{\ell^2}}=\frac{n}{1}=n\to\infty$$
由闭像集定理，所以 $\mathrm{Ran}(T)$ 不是 ℓ^2 的闭子空间。 □

21.2: X,Y 是 Banach 空间，$T\in\mathcal{L}(X;Y)$ 单射，N 是 Y 的闭子空间，使得 $Y=\mathrm{Ran}(T)\oplus N$，则 $\mathrm{Ran}(T)$ 是闭的。

Proof. N 是 Y 的闭子空间，所以 $Y/N=(\mathrm{Ran}(T)\oplus N)/N$ 是 Banach 空间，且令 $\pi:Y\to Y/N,\ y\mapsto[y]_N$，有
$$T':=\pi\circ T:\quad X\to Y/N,\ x\mapsto[T(x)]_N$$
因为 T 是单射，所以 T' 是双射。由逆算子定理，$T'^{-1}\in\mathcal{L}(Y/N;X)$，所以
$$\|[x]_{\ker T}\|_{X/\ker T}=\|x\|_X=\|[T'^{-1}[Tx]]\|_X\leq\|T'^{-1}\|\|[Tx]\|_{Y/N}\leq\|T'^{-1}\|\|Tx\|_Y$$
应用闭像集定理，知道 $\mathrm{Ran}(T)$ 是闭子空间。 □

21.3: 假设 X,Y 是 Banach 空间，$S,T\in\mathcal{L}(X;Y)$。若存在 $c>0$ 使得 $\|Sx\|\leq c\|Tx\|$ 对任意 $x\in X$ 成立，且 $\ker(T)=\ker(S)$，则 $\mathrm{Ran}(T)$ 是闭的，如果 $\mathrm{Ran}(S)$ 是闭的。

Proof. 由闭像集定理，$\|[x]_{\ker T}\|_{X/\ker T}=\|[x]_{\ker S}\|_{X/\ker S}\leq c'\|Sx\|\leq cc'\|Tx\|$，知道 $\mathrm{Ran}(T)$ 也是闭的。 □

21.4: 假设 X,Y 是 Hilbert 空间，$S,T\in\mathcal{L}(X;Y)$。若存在 $c>0$ 使得 $\|Sx\|\leq c\|Tx\|$ 对任意 $x\in X$ 成立，且 $T(\ker(S))\subseteq T(\ker(S)^{\perp})$，则 $\mathrm{Ran}(T)$ 是闭的，如果 $\mathrm{Ran}(S)$ 是闭的。

Proof. 这里的 $\ker(S)^{\perp}$ 是在内积意义下的。一方面，根据 $\|Sx\|\leq c\|Tx\|$ 推出 $\ker T\subseteq\ker S$。另一方面，对于任意 $\alpha\in\ker S$，都存在 $\beta\in\ker(S)^{\perp}\subseteq X$ 使得 $T\alpha=T\beta,\ (\alpha,\beta)=0$，那么 $\alpha-\beta\in\ker T$，推出 $\alpha-\beta\in\ker S$，从而 $\beta\in\ker S\cap\ker(S)^{\perp}$，作内积 $(\beta,\beta)=0$，说明 $T\alpha=0$，即 $\ker S\subseteq\ker T$。应用 **21.3** 题的结论即可。 □