# 2 第二十二次作业

**22.1**：设 $X, Y$ 为 Banach 空间，$K : X \to Y$ 为紧算子，证明如下结论：

- 若 $\mathrm{Im}(K)$ 是闭集，则 $\dim \mathrm{Im}(K) < \infty$；
- $\mathrm{Im}(K) \subseteq Y$ 是可分子空间；
- 若 $Y$ 可分，则存在 Banach 空间 $X$ 以及具有稠密像的紧算子 $K : X \to Y$。

**Proof.** (1) $\mathrm{Im}(K)$ 是 Banach 空间 $Y$ 的闭子空间，从而是 Banach 空间。将值域限制，考虑 $K : X \to \mathrm{Im}(K)$ 是满射，由开映射定理，$\delta \mathbb{B}_{\mathrm{Im}(K)} \subseteq K\mathbb{B}_X$，而后者是紧的，所以 $\mathbb{B}_{\mathrm{Im}(K)}$ 是闭集，推出是紧集，这等价于 $\dim \mathrm{Im}(K) < \infty$。

(2) $K$ 是紧算子，所以 $K\mathbb{B}_X$ 紧集，在度量拓扑下是完全有界集。从而可以选取 $K\mathbb{B}_X$ 的子集作为 $K\mathbb{B}_X$ 的可数稠密子集，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nK\mathbb{B}_X$ 是 $\mathrm{Im}(K)$ 的可数稠密子集。

(3) 熟知，有界秩算子是紧算子，而紧算子的极限仍然是紧算子。所以现在构造有界秩算子。因为 $Y$ 是可分的，所以取可数稠密子集 $\{y_n\} \subseteq \mathbb{B}_Y$，选取 $\ell^1$ 作为 $X$，分量对应 $y_n$，通过截断定义有界秩算子

$$A_m : \ell^1 \to Y,\ e_n \mapsto \begin{cases} y_n & n \le m \\ 0 & n > m \end{cases}; \quad A_m(a_n)_{n\ge 1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k y_k}{k^2}; \quad A(a_n)_{n\ge 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k y_k}{k^2}$$

因为 $A_m$ 是有界秩算子，所以是紧算子。下面证明 $\|A - A_m\| \to 0$，因为

$$\|A - A_m\| = \sup_{\|\xi\|_{\ell^1}=1,\ \xi\in\ell^1} |\langle A - A_m, \xi\rangle| \le \sup_{\|\xi\|_{\ell^1}=1} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k y_k}{k^2} \right| \to 0, \quad m \to \infty$$

所以 $A$ 是紧算子。另一方面，对任意 $y \in Y$，取有理数逼近 $r_k \to \|y\|$，则有 $r_k y_{n_k} \to y$（$\{r_i y_n\}_{i,n}$ 是 $Y$ 上的可数稠密子集），并且 $r_i y_n = K(r_i e_n)$，所以 $A$ 具有稠密像。 □

**22.2**：设 $X$ 为 Banach 空间，$C \subseteq X$ 为闭子集，则如下结论等价：

- $C$ 是紧集；
- 存在序列 $x_n \in X$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0,\ C \subseteq \overline{\mathrm{Conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$。

(1) 必要性。在度量空间中，紧集是完全有界的，所以可以通过以下方式选取折线序列逼近 $C$ 的点。给定 $r_1 = 1/3$，则存在有限个球 $B(x, 1/3)$ 覆盖 $C$，记这些球心构成 $A_1$；归纳地构造，取 $r_n = 1/3^n$，则存在有限个球覆盖 $C$，并且球心构成 $A_n \subseteq A_{n-1}$。设每次构造的球心都和其所属前一次构造的球的球心连线，并放大长度

$$\tilde{A}_n := \{2^n(x - x') \in X : x \in A_n \cap B(x', r_{n-1}), x' \in A_{n-1}\}; \quad \tilde{A}_1 := \{2x \in X : x \in A_1\}$$

这样我们得到了序列 $\bigcup_i \tilde{A}_i \subseteq X$，其顺序是取尽指标低的元素，再取指标高的元素。我们在向量长度上做一些让步，以留出余裕安排凸包的线性组合。至此，对于任意 $x \in C$，则对任意 $n \in \mathbb{N}$，总是存在 $x_n \in A_n$ 使得 $x \in B(x_n, 3^{-n})$，由归

纳性质知道 $x_n \in B(x_{n-1}, 3^{-n+1}), \dots$，设 $x_0 = 0$，所以每个点都能找到对应的序列 $\{x_n\} \in \bigcup_i \tilde{A}_i$ 线性组合逼近

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{2^n (x_n - x_{n-1})}{2^n} \right\| \leq 3^{-n}$$

此外，由于以下结果，序列 $\bigcup_i \tilde{A}_i \subseteq X$ 满足 $\lim \|x\| \to 0$。结合以上，说明命题

$$\|\tilde{x}\| \leq 2^n r_{n-1} \leq \frac{2^n}{3^{n-1}}, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{A}_n$$

(2) 充分性。只需要证明 $K := \overline{\mathrm{Conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ 是紧集，在度量空间中只需证明是列紧的。对于任意点列 $\{y^n\} \subseteq K$，满足 $y^n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n x_k$，则对于任意 $\varepsilon > 0$，总存在 $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得 $\|x_k\| \leq \varepsilon/2$ 对任意 $k \geq N(\varepsilon) + 1$ 成立。因此我们关心前 $N$ 个分量，由于 $[0, 1]^N$ 是紧集，所以总能找到无穷子列 $\{y^{n_i}\}$ 使得

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{n_i} - \lambda_k^{n_j} \right\| \leq \varepsilon/2 \quad \Longrightarrow \|y^{n_i} - y^{n_j}\| \leq \varepsilon$$

变动 $\varepsilon > 0$，结合对角线法，我们找到了 Cauchy 列，而 $K$ 是 Banach 空间的闭子集，所以是收敛列，故列紧。 □

**22.3:** 设 $1 \leq p < q < \infty$，按照如下流程证明所有有界线性算子 $A : \ell^q \to \ell^p$ 都是紧的：

- 固定有界线性算子 $A : \ell^q \to \ell^p$, $\|A\| = 1$ 和 $\ell^q$ 中弱收敛于 0 的序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，则只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\|_p = 0$；
- 若 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\ell^p$ 中弱收敛于 0 的序列，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|y + y_n\|_p^p = \|y\|_p^p + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|y_n\|_p^p$ 对任意 $y \in \ell^p$ 成立；
- 考虑 (1) 中的 $(x_n)_n, A$，固定常数 $\varepsilon > 0$ 并选取 $x \in \ell^q$ 使得 $\|x\|_q = 1$, $1 - \varepsilon < \|Ax\|_p < 1$，则对任意 $\lambda > 0$ 成立

$$(\|Ax\|_p^p + \lambda^p \limsup_{n\to\infty} \|Ax_n\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\|x\|_q^q + \lambda^q \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_q^q)^{\frac{1}{q}}$$

- 存在常数 $C > 0$ 使得对任意 $\lambda > 0, \varepsilon > 0$ 成立

$$\lambda^p \limsup_{n\to\infty} \|Ax_n\|_p^p \leq (1 + \lambda^q C^q)^{\frac{p}{q}} - (1 - \varepsilon)^p$$

- 在 (4) 中不等式令 $\lambda := C^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{q}}$ 得到

$$\limsup_{n\to\infty} \|Ax_n\|_p^p \leq C^p \varepsilon^{1-\frac{p}{q}} \left[ \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{p}{q}} - 1}{\varepsilon} + \frac{1 - (1-\varepsilon)^p}{\varepsilon} \right]$$

  对任意 $\varepsilon > 0$ 成立，在上式中取极限 $\varepsilon \to 0$ 来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\|_p = 0$。

**Proof.** (1) 如果 (1) 中的前提成立，则对于 $\ell^q$ 中的弱收敛列 $x_n \xrightarrow{w} x$，都有 $x_n - x \xrightarrow{w} 0$，从而应用前提，推出

$$\lim_{n\to\infty} \|A(x_n - x)\|_p = 0 \implies Ax_n \xrightarrow{s} Ax$$

(2) 一方面，由于 $p \geq 1$，所以由 $x^p$ 的凸性可知

$$\|y + y_n\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |y^k + y_n^k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |y^k|^p + |y_n^k|^p \leq \|y\|_p^p + \|y_n\|_p^p$$

同时取上极限即可。另一方面，由于弱收敛 $y_n \xrightarrow{w} 0$，所以 $p \in [1, \infty)$ 时，可以选取测试函数 $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$

$$|\langle y_n, e_k \rangle| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies y_n^k \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

这说明可以控制 $y_n$ 的有限项一致收敛，而 $y \in \ell^p$ 在选定后，可以控制 $\sum_{m=N+1}^{\infty} |y^m|^p$ 的收敛。因此

$$
\begin{aligned}
\|y+y_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{N} |y^k + y_n^k|^p + \sum_{k=1}^{N} |y_n^k|^p - \sum_{k=1}^{N} |y_n^k|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |y^k + y_n^k|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |y^k|^p - \sum_{k=N+1}^{\infty} |y^k|^p \\
&\geq \sum_{k=1}^{N} |y^k|^p - \sum_{k=1}^{N} |y_n^k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |y_n^k|^p - \sum_{k=N+1}^{\infty} |y^k|^p - \sum_{k=1}^{N} |y_n^k|^p
\end{aligned}
$$

固定 $N$，同时取 $n$ 的上极限，得到

$$
\overline{\lim_n} \|y+y_n\|_p^p \geq \sum_{k=1}^{N} |y^k|^p + \overline{\lim_n} \|y_n^k\|_p^p - \sum_{k=N+1}^{\infty} |y^k|^p
$$

取 $N$ 的极限，由收敛性得证。

(3) 直接计算，应用 (2) 的结论即可

$$
(\|x\|_q^q + \lambda^q \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_q^q)^{\frac{1}{q}} = (\limsup_{n\to\infty} \|x+\lambda x_n\|_q^q)^{\frac{1}{q}} = \limsup_{n\to\infty} \|x+\lambda x_n\|_q \cdot \|A\| \geq \limsup_{n\to\infty} \|Ax + \lambda A x_n\|_p
$$

剩最后一步，再次应用 (2) 的结果即可。为此，我们需要说明 $Ax_n \xrightarrow{w} 0$，这是因为 $x_n \xrightarrow{w} 0$，所以对任意 $\varphi_p \in (\ell^p)^*$，有

$$
|\langle \varphi_p, Ax_n \rangle| \leq |\langle \varphi_p \circ A, x_n \rangle| \to 0 \implies Ax_n \xrightarrow{w} 0
$$

(4) 由 (3) 的结果知道，取 $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_q$ 即可。

$$
\lambda^p \limsup_{n\to\infty} \|Ax_n\|_p^p \leq (\|x\|_q^q + \lambda^q \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_q^q)^{\frac{p}{q}} - \|Ax\|_p^p \leq (1+\lambda^q C^q)^{\frac{p}{q}} - (1-\varepsilon)^p
$$

(5) 由题目表述即可证明完整命题，具体估计只需用到 $(1+x)^p \approx 1 + xp$ 的展开。 □