4 第二十四次作业

24.1: 若 $\Lambda \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}((X, \|\cdot\|; \mathbb{C}); \mathbb{C})$，则

- $\operatorname{Re}\Lambda \in \mathcal{L}((X, \|\cdot\|; \mathbb{R}); \mathbb{R})$；
- $\Phi : \mathcal{L}^{\mathbb{C}}((X, \|\cdot\|; \mathbb{C}); \mathbb{C}) \to \mathcal{L}((X, \|\cdot\|; \mathbb{R}); \mathbb{R})$ 是等距同构，如果 $\Phi(\Lambda) = \operatorname{Re}\Lambda$。

Proof. $\operatorname{Re}\Lambda$ 和 Λ 可以相互表示，且 Λ 具有复线性

$$\Lambda(x) = \operatorname{Re}\Lambda(x) + i \cdot \operatorname{Im}\Lambda(x) = \operatorname{Re}\Lambda(x) - i \cdot \operatorname{Re}\Lambda(ix),\ \forall x \in X$$

(1) 将上式的 x 替换为 $\lambda x, x+y$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$，比较实部系数，即可说明 $\operatorname{Re}\Lambda$ 是实线性泛函。

(2) 考虑题设算子 $\Phi : \Lambda \to \operatorname{Re}\Lambda$，需要证明实线性、有界、双射、逆连续、等距：

- 实线性：$\Phi(\Lambda_1 + \alpha\Lambda_2) = \operatorname{Re}(\Lambda_1 + \alpha\Lambda_2) = \operatorname{Re}\Lambda_1 + \alpha \operatorname{Re}\Lambda_2 \in \mathcal{L}((X, \|\cdot\|; \mathbb{R}); \mathbb{R})$；
- 有界性：$\|\Phi\| := \sup\limits_{\Lambda \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}, \|\Lambda\|=1} \sup\limits_{x \in X, \|x\|=1} |\operatorname{Re}\Lambda(x)| \le \sup\limits_{\Lambda \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}, \|\Lambda\|=1} \sup\limits_{x \in X, \|x\|=1} |\Lambda(x)| = 1$，取 $\Lambda(x)$ 为实泛函即可达到最大值 1；
- 双射：开头式子已说明，给定任意 $f \in \mathcal{L}((X, \|\cdot\|; \mathbb{R}); \mathbb{R})$ 可以找到一个 $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}((X, \|\cdot\|; \mathbb{C}); \mathbb{C})$ 的原像，从而说明满射

  $$\Phi(f(x) - if(ix)) = f(x), \quad f((a+ib)x) - if(i(a+ib)x) = (a+ib)(f(x) - if(ix))$$

  而如果 $\operatorname{Re}\Lambda = \operatorname{Re}\Lambda'$，根据证明开头的式子，说明 $\Lambda = \Lambda'$，从而是单射；
- 逆连续：上述给出的逆映射 $\Phi^{-1} : f \mapsto \Phi^{-1}(f) = f(x) - if(ix)$ 是线性、有界的，从而连续。其中

  $$\|\Phi^{-1}\| := \sup_{\|f\|=1, f \in \mathcal{L}((X, \|\cdot\|; \mathbb{R}); \mathbb{R})} \sup_{x \in X, \|x\|=1} |f(x) - if(ix)| \le 1$$

  这是因为记 $f(x) - if(ix)$ 的辐角为 θ，则由于复线性知道 $|f(x) - if(ix)| = |e^{i\theta} f(xe^{-i\theta})|$；
- 等距：根据 $\|\Phi^{-1}\| = \|\Phi\| = 1$ 得证。 □

24.2: 若 $X = (X, \|\cdot\|; \mathbb{R})$ 对任意 $z \in X^{\mathbb{C}}$，记

$$\|z\|_{X^{\mathbb{C}}} := \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \sqrt{\|\operatorname{Re}(e^{i\theta} z)\|_X^2 + \|\operatorname{Im}(e^{i\theta} z)\|_X^2}$$

- $(X^{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{X^{\mathbb{C}}})$ 是复赋范空间，且 $(X^{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{X^{\mathbb{C}}})$ 是 Banach，如果 X 是 Banach；
- 若 $A : (X, \|\cdot\|; \mathbb{R}) \to (Y, \|\cdot\|; \mathbb{R})$，记 $A^{\mathbb{C}} : (X^{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{X^{\mathbb{C}}}) \to (Y^{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{Y^{\mathbb{C}}})$ 使得

  $$A^{\mathbb{C}}(x + iy) := Ax + iAy, \quad \forall x + iy \in X^{\mathbb{C}}, x, y \in X$$

  则 $A^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X^{\mathbb{C}}; Y^{\mathbb{C}})$ 且 $\|A^{\mathbb{C}}\| = \|A\|$，如果 $A \in \mathcal{L}(X; Y)$。

Proof. (1) 只需验证 $X^{\mathbb{C}}$ 是复线性空间、复赋范空间，并且 X 是 Banach 空间时是 Banach 空间：

- 复线性空间：$(a+ib)(x,y)+(x',y')=(ax-by,bx+ay)+(x',y')=(ax-by+x',bx+ay+y')\in X^{\mathbb{C}}$；
- 正定性：不妨设 $z=x+iy$，则计算得到 $\|z\|_{X^{\mathbb{C}}}=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\sqrt{\|x\cos\theta-y\sin\theta\|_X^2+\|y\cos\theta+x\sin\theta\|_X^2}$，令其等于 0，解得对任意 $\theta\in\mathbb{R}$ 都有 $x\cos^2\theta=x\sin^2\theta$，这说明 $x=0$，同理 $y=0$；
- 齐次性：设非零常数 $a+ib=\lambda=|\lambda|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|\lambda|e^{i\varphi}$，则 $\lambda e^{i\theta z}=|\lambda|e^{i(\theta+\varphi)}$，齐次性得证；
- 三角不等式：设 $z=x+iy,z'=x'+iy'$，直接计算

$$\begin{aligned}\|z+z'\|_{X^{\mathbb{C}}} &= \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\sqrt{\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}(z+z'))\|_X^2+\|\mathrm{Im}(e^{i\theta}(z+z'))\|_X^2}\\ &\le \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\sqrt{(\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}z)\|_X+\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}z')\|_X)^2+(\|\mathrm{Im}(e^{i\theta}z)\|_X+\|\mathrm{Im}(e^{i\theta}z')\|_X)^2}\\ &\le \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\sqrt{\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}z)\|_X^2+\|\mathrm{Im}(e^{i\theta}z)\|_X^2}+\sqrt{\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}z')\|_X^2+\|\mathrm{Im}(e^{i\theta}z')\|_X^2}\\ &\le \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\sqrt{\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}z)\|_X^2+\|\mathrm{Im}(e^{i\theta}z)\|_X^2}+\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\sqrt{\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}z')\|_X^2+\|\mathrm{Im}(e^{i\theta}z')\|_X^2}\\ &= \|z\|_{X^{\mathbb{C}}}+\|z'\|_{X^{\mathbb{C}}}\end{aligned}$$

- 如果 X 是 Banach 空间，则取 $X^{\mathbb{C}}$ 中任意 Cauchy 列 $\{z_n\}$，设 $z_n=x_n+iy_n$。事实上，对于 $z=x+iy$

$$\|z\|_{X^{\mathbb{C}}}\ge\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}z)\|_X\ge\|\mathrm{Re}z\|_X=\|x\|_X$$

对于 y 也是成立的。所以 x_n,y_n 均为 Cauchy 列，由 X 完备性知道 $x_n\to x,y_n\to y$，从而 $z_n\to x+iy\in X^{\mathbb{C}}$。

(2) 需要验证当 $A\in\mathcal{L}(X;Y)$ 时，$A^{\mathbb{C}}$ 是有界线性算子，并且满足范数相等：

- 复线性：$A^{\mathbb{C}}((a+ib)(x+iy)+(x'+iy'))=A(ax-by+x')+iA(bx+ay+y')=(a+ib)A^{\mathbb{C}}(x+iy)+A^{\mathbb{C}}(x'+iy')$；
- 有界性，直接计算：

$$\begin{aligned}\|A^{\mathbb{C}}\|: &= \sup_{x+iy\in X^{\mathbb{C}},\|x+iy\|_{X^{\mathbb{C}}}=1}\|Ax+iAy\|_{Y^{\mathbb{C}}}\\ &\le \sup_{x,y\in X^{\mathbb{C}},\|x+iy\|_{X^{\mathbb{C}}}=1}\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\sqrt{\|A(x\cos\theta-y\sin\theta)\|_Y^2+\|A(x\sin\theta+y\cos\theta)\|_Y^2}\\ &\le \|A\|\sup_{x,y\in X^{\mathbb{C}},\|x+iy\|_{X^{\mathbb{C}}}=1}\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\sqrt{\|x\cos\theta-y\sin\theta\|_Y^2+\|x\sin\theta+y\cos\theta\|_Y^2}\\ &= \|A\|\end{aligned}$$

且取 $y=0$ 时，即可达到等号，所以 $\|A^{\mathbb{C}}\|=\|A\|$。 □

24.3: 若 $\Lambda_1+i\Lambda_2\in(\mathcal{L}((X,\|\cdot\|;\mathbb{R});\mathbb{R}))^{\mathbb{C}}$，其中 $\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathcal{L}((X,\|\cdot\|;\mathbb{R});\mathbb{R})$，有

$$\Lambda^{\mathbb{C}}(x+iy)=\Lambda_1(x)-\Lambda_2(y)+i(\Lambda_2(x)+\Lambda_1(y))$$

- $\Phi:(\mathcal{L}(X,\|\cdot\|;\mathbb{R});\mathbb{R})^{\mathbb{C}}\to\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X^{\mathbb{C}};\mathbb{C})$ 是同构，如果 $\Phi(\Lambda_1+i\Lambda_2)=\Lambda^{\mathbb{C}}$；
- 若 X 是 Hilbert 空间，则 Φ 还是等距的。

Proof. (1) 只需要验证 Φ 是有界线性双射：

- 复线性：对于任意 $\Lambda_1+i\Lambda_2,\Lambda_3+i\Lambda_4\in(\mathcal{L}((X,\|\cdot\|;\mathbb{R});\mathbb{R}))^{\mathbb{C}}$，其中 $\Lambda_i\in\mathcal{L}((X,\|\cdot\|;\mathbb{R});\mathbb{R})$, $a,b\in\mathbb{R}$，有：

$$\begin{aligned}\Phi((a+ib)(\Lambda_1+i\Lambda_2)+(\Lambda_3+i\Lambda_4))(x+y) &= \Phi((a\Lambda_1-b\Lambda_2+\Lambda_3)+i(b\Lambda_1+a\Lambda_2+\Lambda_4))(x+y)\\ &= a\Lambda_1(x)-b\Lambda_2(x)+\Lambda_3(x)-b\Lambda_1(y)-a\Lambda_2(y)-\Lambda_4(y)\\ &\quad+i[b\Lambda_1(x)+a\Lambda_2(x)+\Lambda_4(x)+a\Lambda_1(y)-b\Lambda_2(y)+\Lambda_3(y)]\\ &= [(a+ib)\Phi(\Lambda_1+i\Lambda_2)+\Phi(\Lambda_3+i\Lambda_4)](x+y)\end{aligned}$$

- 双射：对任意 $\Lambda^{\mathbb{C}}$，取 $\Lambda_1(x)=\mathrm{Re}\Lambda^{\mathbb{C}}(x)$, $\Lambda_2(x)=-\mathrm{Re}\Lambda^{\mathbb{C}}(ix)$，则 $\Phi(\Lambda_1+i\Lambda_2)=\Lambda^{\mathbb{C}}$，从而满射；对 $\Phi(\Lambda_1+i\Lambda_2)=\Phi(\Lambda_3+i\Lambda_4)$，将上式作用在 x 上，得到 $\Lambda_1(x)+i\Lambda_2(x)=\Lambda_3(x)+i\Lambda_4(x)$，比较系数即可说明单射。
- 有界：注意到 $X^{\mathbb{C}}$ 的范数用到了旋转 $e^{i\theta}$，而 $\Lambda^{\mathbb{C}}$ 是复线性算子，所以

$$\begin{aligned}\|\Phi\| &= \sup_{\substack{\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathcal{L}(X;\mathbb{R})\\ \|\Lambda_1+i\Lambda_2\|_{(\mathcal{L}(X;\mathbb{R}))^{\mathbb{C}}}=1}} \sup_{\|z\|_{X^{\mathbb{C}}}=1} |\Lambda^{\mathbb{C}}(z)| \\ &= \sup_{\substack{\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathcal{L}(X;\mathbb{R})\\ \|\Lambda_1+i\Lambda_2\|_{(\mathcal{L}(X;\mathbb{R}))^{\mathbb{C}}}=1}} \sup_{\|x\|_X^2+\|y\|_X^2=1} |\Lambda_1(x)+\Lambda_2(y)| \\ &= \sup_{\substack{\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathcal{L}(X;\mathbb{R})\\ \|\Lambda_1+i\Lambda_2\|_{(\mathcal{L}(X;\mathbb{R}))^{\mathbb{C}}}=1}} \sup_{\|x\|_X^2+\|y\|_X^2=1} \|\Lambda_1\|\|x\|+\|\Lambda_2\|\|y\| \\ &= \sup_{\substack{\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathcal{L}(X;\mathbb{R})\\ \|\Lambda_1+i\Lambda_2\|_{(\mathcal{L}(X;\mathbb{R}))^{\mathbb{C}}}=1}} \|\Lambda_1\|^2+\|\Lambda_2\|^2 \le 1\end{aligned}$$

  其中用到了 Cauchy 不等式，以及最后用到了复化算子空间范数的定义，注意到 Λ_1,Λ_2 分别是复化算子的实部和虚部。特别地，取复化算子空间的实算子可以达到最大值，所以 $\|\Phi\|=1$；
- 逆有界：直接计算，以下 $\Lambda_1(x)=\mathrm{Re}\Lambda^{\mathbb{C}}(x),\Lambda_2(x)=-\mathrm{Re}\Lambda^{\mathbb{C}}(ix)$，则

$$\|\Phi\|^{-1}=\sup_{\|\Lambda^{\mathbb{C}}\|=1}\|\Lambda_1+i\Lambda_2\|_{(\mathcal{L}((X;\mathbb{R});\mathbb{R}))^{\mathbb{C}}}\le\sup_{\|\Lambda^{\mathbb{C}}\|=1}\|\Lambda_1\|_{(\mathcal{L}((X;\mathbb{R});\mathbb{R}))^{\mathbb{C}}}+\|\Lambda_2\|_{(\mathcal{L}((X;\mathbb{R});\mathbb{R}))^{\mathbb{C}}}\le\sup_{\|\Lambda^{\mathbb{C}}\|=1}2\|\mathrm{Re}\Lambda^{\mathbb{C}}\|\le 2$$

(2) 如果 X 是 Hilbert 空间，由 Riesz 表示定理知道，$X\cong\mathcal{L}((X,\|\cdot\|;\mathbb{R}))$ 是等距同构，具体为 $\Psi: x\mapsto\Psi_x,\Psi_x(y)=\langle x,y\rangle$。

- $X^{\mathbb{C}}\cong(\mathcal{L}((X,\|\cdot\|;\mathbb{R});\mathbb{R}))^{\mathbb{C}}$ 是等距同构。我们记它们之间的映射 $\tilde{\Psi}(x+iy)=\Psi(x)+i\Psi(y)$，这是复线性双射，且

$$\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}z)\|_X=\|\Psi(\mathrm{Re}(e^{i\theta}(x+iy)))\|_{\mathcal{L}}=\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}\tilde{\Psi}(z))\|_{\mathcal{L}}\implies\|z\|_{X^{\mathbb{C}}}=\|\tilde{\Psi}(z)\|_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}}$$

  所以是等距同构。
- 证明 $X^{\mathbb{C}}\cong\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X^{\mathbb{C}};\mathbb{C})$ 是等距同构。由 Riesz 表示定理知道，只需要证明 $X^{\mathbb{C}}$ 是 Hilbert 空间。配备复内积（容易验证这是内积，并且与 X 的实内积相容）

$$(x+iy,x'+iy')_{\mathbb{C}}=(x,x')_{\mathbb{R}}+(y,y')_{\mathbb{R}}+i(y,x')_{\mathbb{R}}-i(x,y')_{\mathbb{R}}$$

  这诱导了范数

$$\|x+iy\|_{\mathbb{C}}=\sqrt{\|x\|_X^2+\|y\|_X^2}\le\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\sqrt{\|\mathrm{Re}(e^{i\theta}(x+iy))\|_X^2+\|\mathrm{Im}(e^{i\theta}(x+iy))\|_X^2}=\|x+iy\|_{X^{\mathbb{C}}}=\|e^{i\theta_{\max}}(x+iy)\|_{\mathbb{C}}$$

  说明复内积诱导范数，得到的赋范空间就是 $X^{\mathbb{C}}$。根据题目 **24.2**，此时 $X^{\mathbb{C}}$ 是 Hilbert 空间，再次应用 Riesz 表示定理即可。 □