5 第二十五次作业

25.1: 说明右平移算子 $R:\ell^2\to\ell^2$ 使得 $R(\{x_i\}_{i\geq 1})=(0,x_1,x_2,\ldots)$，满足 $C_\sigma(R)=\{|\lambda|=1\}$ 且 $R_\sigma(R)=\{|\lambda|<1\}$。

Proof. (1) 先说明不存在点谱，因为对于任意 $\lambda\in\mathbb{C}$，对任意 $x^1=(x_1^1,x_2^1,\ldots)$ 和 $x^2=(x_1^2,x_2^2,\ldots)$ 都有

$$(\lambda I-R)(x^1)=(\lambda x_1^1,\lambda x_2^1-x_1^1,\ldots)=(\lambda x_1^2,\lambda x_2^2-x_1^2,\ldots)=(\lambda I-R)(x^2)\implies x^1=x^2$$

(2) $\{|\lambda|=1\}$ 是连续谱。对于任意 $y\in\ell^2$，注意到取截断数列，配备均匀 m 项的衰减：

$$x_N:=(\sum_{i=1}^{1}y_i,\sum_{i=1}^{2}y_i,\ldots,\sum_{i=1}^{N-1}y_i,\sum_{i=1}^{N}y_i,\frac{(m-1)\sum_{i=1}^N y_i}{m},\frac{(m-2)\sum_{i=1}^N y_i}{m},\ldots,0,0,\ldots)$$

则有如下估计，结合 $y\in\ell^2$ 可知尾部受到控制，所以能说明 $y\in\overline{\operatorname{Ran}(I-R)}$：

$$y-(I-R)(x_N)=(0,0,\ldots,0,y_{N+1}+\frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m},y_{N+2}+\frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m},\ldots,y_{N+m}+\frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m},0,0,\ldots)$$

只要 N 足够大，$y_{N+1},\ldots,y_{N+m}$ 就可以被控制（且与 m 无关）；然后取 m 足够大，也能控制：

$$\sum_{k=1}^{m}\left|y_{N+k}+\frac{\sum_{i=1}^N y_i}{m}\right|^2\leq 2\sum_{k=1}^{m}|y_{N+k}|^2+2\cdot\frac{|\sum_{i=1}^N y_i|^2}{m}\leq 2\sum_{k=N+1}^{\infty}|y_k|^2+2\cdot\frac{|\sum_{i=1}^N y_i|^2}{m}$$

接下来说明 $\operatorname{Ran}(I-R)\neq\ell^2$，只需要找一个反例，如 $y=(1,0,0,\ldots)\in\ell^2\setminus\operatorname{Ran}(I-R)$。假设存在 $x\in\ell^2$ 使得 $(I-R)x=y$，那么解得 $x=(1,1,1,\ldots)$，矛盾。

(3) $\{|\lambda|<1\}$ 是剩余谱。对于任意 $|\lambda|<1$，可以验证 $y=(1,0,0,\ldots)\in\ell^2\setminus\operatorname{Ran}(\lambda I-R)$。另外，注意到 $\operatorname{Ran}(\lambda I-R)\subseteq\{(\overline{\lambda}^k)_{k\geq 1}\}^\perp$。具体而言，在 Hilbert 空间 ℓ^2 中，定义连续线性算子：$\Phi_\lambda:\ell^2\to\mathbb{C}$，使得对任意 $x\in X$ 有

$$\Phi_\lambda(x)=(x,(\overline{\lambda}^k)_{k\geq 1})$$

而作用在 $\operatorname{Ran}(\lambda I-R)$ 上，可以得到

$$((\lambda I-R)x,(\overline{\lambda}^k)_{k\geq 1})=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k+1}x_k-\lambda^k x_{k-1}=\lim_{k\to\infty}\lambda^{k+1}x_k=0$$

因此 $\operatorname{Ran}(\lambda I-R)\subseteq\ker\Phi_\lambda$，后者复维数为 1 并且是闭子空间。$\ell^2$ 为无穷维复线性空间，所以 $\overline{\operatorname{Ran}(\lambda I-R)}\subseteq\ker\Phi_\lambda\subsetneq\ell^2$。

(4) $\{|\lambda|>1\}$ 是正则集。显然 $\|R\|=1$，应用 Neumann 定理说明 $\lambda I-R$ 是有界线性双射，所以 $\lambda\in\rho(R)$。 □

25.2: 设 X 为复 Banach 空间，$A\in\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X)$ 为双射且是有界复线性算子，实数 ε,r 使得 $0<\varepsilon<\|A^{-1}\|^{-1}\leq\|A\|<r$，证明 $\{\varepsilon<|\lambda|<r\}\supseteq\sigma(A)$。

Proof. 原题干存在问题，已将 $\subseteq$ 改为 $\supseteq$，前者显然与谱的紧性矛盾。在更新后的题目中，应用 Neumann 定理。对任意 $|\lambda|>\|A\|$ 有 $\lambda\in\rho(A)$；另一边，对任意 $|\lambda|<\|A^{-1}\|^{-1}$ 有 $\lambda^{-1}\in\rho(A^{-1})$（忽略 $\lambda=0$，显然 0 是 A,A^{-1} 的正则值，因为由逆算子定理知道 A^{-1} 是有界复线性算子），结合 A^{-1},A 是同构，知道 $(\lambda^{-1}I-A^{-1})A=-\lambda^{-1}(\lambda I-A)$ 仍然是同构，所以 $\lambda\in\rho(A)$。综上 $\{|\lambda|<\|A^{-1}\|^{-1}\}\cup\{|\lambda|>\|A\|\}\subseteq\rho(A)$，取补集

$$\{r>|\lambda|>\varepsilon\}\supseteq\{\|A\|\geq|\lambda|\geq\|A^{-1}\|^{-1}\}\supseteq\sigma(A)$$

得证。 □

25.3：设 X 为复 Banach 空间，$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 为开集，$f: \Omega \to X$ 为全纯函数：

- f 的导数 $f': \Omega \to X$ 也是全纯的；
- f 是光滑的；
- 取 $z_0 \in \Omega, r > 0$ 使得 $\overline{B_r(z_0)} \subseteq \Omega$，定义 $\gamma(t) := z_0 + re^{2\pi i t}$，证明 f 在 $w \in B_r(z_0)$ 处的第 n 阶导数由 Cauchy 积分公式给出：
$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

Proof. 类似于讲义中的证明，可以说明：f 是全纯的，当且仅当对任意 $z_0 \in \Omega, r > 0$，满足 $\overline{B_r(z_0)} \subseteq \Omega$，并且对任意 $x^* \in X^*, w \in B_r(z_0)$ 都有 Cauchy 公式成立

$$\langle x^*, f(w) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{z-w} \mathrm{d}z$$

而 f' 满足 $\lim_{h\to 0} \|f(w+h) - f(w) - hf'(w)\| = 0$，所以取 $0 < |h| < r - |w|$，有

$$\langle x^*, f(w+h) - f(w) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{z-w-h} - \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{z-w} \mathrm{d}z = \frac{h}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w-h)(z-w)} \mathrm{d}z$$

两边同除 $h \in \mathbb{C}$，取极限 $h \to 0$。根据定义（全纯定义和 Riemann 积分定义）

$$\frac{\langle x^*, f(w+h) - f(w) \rangle}{h} \to \langle x^*, f'(w) \rangle; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w-h)(z-w)} \mathrm{d}z \to \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w)^2} \mathrm{d}z$$

因为 $f(z)$ 是连续函数，所以在 γ 上是有界的，故向量值积分收敛，说明满足如下交换

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle x^*, f(z) \rangle}{(z-w)^2} \mathrm{d}z = \left\langle x^*, \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2} \mathrm{d}z \right\rangle$$

由于 X 是 Banach 空间，所以由 x^* 的任意性知道

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2} \mathrm{d}z$$

在这个表达下，用定义验证全纯性：

$$0 = \frac{f'(w+h) - f'(w) - \frac{h}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)(2z-2w-h)}{(z-w-h)^2(z-w)^2} \mathrm{d}z}{h} \to \frac{f'(w+h) - f'(w) - h \cdot \frac{2!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^3} \mathrm{d}z}{h}$$

这说明 $f''(w)$ 存在，所以 $f'(w)$ 是全纯的

$$f''(w) = \frac{2!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^3} \mathrm{d}z$$

而这个过程可以不断递推下去，从而说明 f 是复光滑的。此外，仿照上述第 2 阶导数的求解过程，可以归纳地得到第 n 阶导数，即由归纳前提

$$f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} \mathrm{d}z$$

推出

$$\frac{f^{(k)}(w+h) - f^{(k)}(w) - \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)[(z-w)^{k+1} - (z-w-h)^{k+1}]}{(z-w-h)^{k+1}(z-w)^{k+1}} \mathrm{d}z}{h} \to \frac{f^{(k)}(w+h) - f^{(k)}(w) - h \cdot \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{k+2}} \mathrm{d}z}{h}$$

整理得证。 $\square$

25.4：设 X 为复 Banach 空间，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 X 中序列，且

$$\rho := \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\|a_n\|^{1/n}} > 0$$

证明幂级数 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 对任意满足 $|z| < \rho$ 的复数 z 收敛，并且 $f : B_\rho(0) \to X$ 是全纯函数；取 $0 < r < \rho$ 并定义环路 $\gamma(t) = re^{2\pi i t}$，证明系数 a_n 由以下公式给出：

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$$

Proof. (1) 对于幂级数，由几何级数控制模长。其中由上极限知道，当 N 足够大时，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $|1+\varepsilon\rho||z| < \rho$ 并且 $\|a_n\|^{1/n} \le \rho^{-1} + \varepsilon$ 对任意 $n \ge N$ 成立，则

$$\left\|\sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n\right\| \le \sum_{k=N}^{\infty}(\rho^{-1}+\varepsilon)^n \cdot |z|^n \le \sum_{k=N}^{\infty}\frac{|1+\varepsilon\rho|^n|z|^n}{\rho^n}$$

由定义验证全纯性。对于任意 $z \in B_\rho(0)$，和 $0 < |h| < \rho - |z|$，有（下面有说明）

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{f(z+h)-f(z)-h\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{h}\right\| &= \left\|\frac{f(z+h)-f(z)-h\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{h}\right\| \\
&\le \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} z^{n-k}h^{k-1}\binom{n}{k}\right\| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}(\rho^{-1}+\varepsilon)^n(\varepsilon+|z|)^n \cdot \sqrt[3]{h} = \sqrt[3]{h}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|1+\varepsilon\rho|^n(\varepsilon+|z|)^n}{\rho^n}
\end{aligned}$$

第一步放缩是直接展开，然后用三角不等式；第二步放缩是做了简化，因为之前分析知道（可以加强），给定 $z \in B_\rho(0)$ 后，存在一个足够小的 $\varepsilon > 0$ 满足关系式 $|1+\varepsilon\rho|(\varepsilon+|z|) < \rho$，那么总是存在一个足够大的 N 使得当 $n \ge N$ 时总是有 $\|a_n\|^{1/n} \le \rho^{-1}+\varepsilon$。因为 N 之前是有限项，每一项都带 h，所以当 $h \to 0$ 时可以被控制。据此，不妨设 $N = 1$。同时，不妨设 $|h| < 1$，当 $|h| < \varepsilon^3$ 时，可以具体写出第二个放缩过程

$$\left|\sum_{k=2}^{n} z^{n-k}h^{k-1}\binom{n}{k}\right| \le \sqrt[3]{h}\cdot\sum_{k=2}^{n}|z^{n-k}|(\sqrt[3]{h})^k\binom{n}{k} \le \sqrt[3]{h}\cdot(|z|+\varepsilon)^n$$

从而当 $h \to 0$ 时，左端趋于 0，说明全纯。因为幂级数在定义域上绝对收敛，积分求和可以换序，由题目 **25.3** 知道

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k}{z^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{n!}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_\gamma z^{k-n-1}\mathrm{d}z = n! a_n$$

这是根据复积分计算得到的。 □

25.5：设 X 为复 Banach 空间，$A : X \to X$ 为有界复线性算子，$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ 为复系数多项式，直接证明算子 $p(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ 满足 $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$。

Proof. 不使用算子演算的性质。(1) 首先证明 $\sigma(p(A)) \supseteq p(\sigma(A))$，固定 $\lambda \in \sigma(A)$，则存在复系数多项式 q 使得 $p(z) - p(\lambda) = (z-\lambda)q(z)$，即 $p(\lambda)I - p(A) = (\lambda I - A)q(A)$，根据定义，$\lambda I - A$ 不是双射，所以 $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$。

(2) 其次证明 $p(\sigma(A)) \supseteq \sigma(p(A))$，不妨设 $a := a_n \ne 0$，固定 $\mu \in \sigma(p(A))$ 以及 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为多项式 $p - \mu$ 的零点，于是 $p(z) - \mu = a\prod_{i=1}^{n}(z-\lambda_i)$，则 $p(A) - \mu I = a\prod(A - \lambda_i I)$，如果 $A - \lambda_i I$ 都是双射，那么左侧也是双射，与 μ 的定义矛盾，因此至少存在一个 λ_i 使得 $\lambda_i I - A$ 不是双射，所以 $\lambda_i \in \sigma(A)$，因此代入多项式得到 $p(\lambda_i) - \mu = 0$，即 $\mu \in p(\sigma(A))$。 □