6 第二十六次作业

26.1：对应于题目 25.2，证明

$$A^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{R(z,A)}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{R(z,A)}{z}\mathrm{d}z$$

Proof. 根据算子演算，x^{-1} 是环域 $B(r)-\overline{B(\varepsilon)}$ 上的全纯函数，因为 Dunford 积分要求满足闭环域的性质，因此需要调整绕向和符号，就是上式的表达。 □

26.2：设 H 是复 Hilbert 空间，$A\in\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(H)$，$E\subseteq H$ 为闭复线性子空间，称子空间 E 在 A 下不变，如果对任意 $x\in E$ 都有 $Ax\in E$。证明 E 在 A 下不变，当且仅当 $E^{\perp}$ 在 A^* 下不变。

Proof. 必要性，对于任意 $x\in E, y\in E^{\perp}$ 都有 $\langle A^*y,x\rangle=\langle y,Ax\rangle=0$，所以 $E^{\perp}$ 在 A^* 下不变。充分性，因为 $E\subseteq H$ 是闭子空间，所以对于任意 $x_0\in H\setminus E$，都可以由 Hahn-Banach 定理进行分离，即找到 $\varphi\in E^{\perp}$ 满足 $\varphi(x_0)\neq 0$，从而根据必要性中的式子，结合任意性即可说明结论。 □

26.3：若 $A\in\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X)$ 满足 $\ker((\lambda I-A)^m)=\ker((\lambda I-A)^{m+1})$，则 $\ker((\lambda I-A)^m)=\ker((\lambda I-A)^{m+k})$ 对任意 $k\geq 1$。

Proof. 这是核的稳定性，只证明一侧。对于任意 $x\in X\cap\ker(\lambda I-A)^{m+2}$，都有 $0=(\lambda I-A)^{m+2}x=(\lambda I-A)(\lambda I-A)^{m+1}x=(\lambda I-A)(\lambda I-A)^m x=(\lambda I-A)^{m+1}x$，所以归纳得证。 □

26.4：假设 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{0\}$，其中 $A\in\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X)$ 是紧算子。若 $P_\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\lambda|=\varepsilon}R(z,A)\mathrm{d}z$，其中 $\{|z-\lambda|\leq\varepsilon\}\setminus\{\lambda\}\subseteq\rho(A)$, $Y=\mathrm{Ran}\,(P_\lambda)$，则对于任意 $m\geq 1$ 都有 $\ker((\lambda I-A)^m)=\ker((\lambda I-A|_Y)^m)$。

Proof. P_λ 是由 1 演化而来的，所以 P_λ 显然是投影算子，并且 $1\cdot x=x\cdot 1$ 说明 $P_\lambda A=AP_\lambda$，所以推出 $\ker P_\lambda\oplus\mathrm{Ran}\,P_\lambda=X$，并且这是 A-不变子空间。对于任意 $x\in X\ \cap\ \ker((\lambda I-A)^m)$，可以写为 $x=u+v$，其中 $u\in\ker P_\lambda, v\in\mathrm{Ran}\,P_\lambda$，则

$$0=(\lambda I-A)^m(u+v)=[(\lambda I-A|_Y)^m\oplus(\lambda I-A|_{\ker P_\lambda})^m](u+v)=(\lambda I-A|_Y)^m u+(\lambda I-A|_{\ker P_\lambda})^m v$$

由不变子空间和直和，知道必须两项都要为零，而后者因为 $\lambda\notin\sigma(A|_{\ker P_\lambda})$ 所以是双射，因此必须有 $v=0$，从而 $\ker((\lambda I-A)^m)$ 的元素就是 $\ker(\lambda I-A|_Y)^m)$ 的那些元素（补空间上为零元）。反向包含是显然的，命题得证。 □

26.5：补充讲义证明：A 是紧算子，则 $\sigma_P(A)$ 是至多可数集。

Proof. 由于非零的点谱是孤立点谱，所以取以原点为圆心的闭环面覆盖：

$$\mathbb{C}=\bigcup_{n=1}[\overline{B(n+1)}\setminus B(n)]\ \cup\ \bigcup_{n=1}[\overline{B(1/n)}\setminus B(1/(n+1))]$$

每一个环都不包含原点，由紧性知道每个环都有限，从而孤立点谱 $\sigma_P(A)$ 是至多可数集。 □

26.6： $A \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X)$, $r > 0$ 满足 $r > \|A\|$。若 $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$，则

- $e^A = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|z|=r} e^z R(z, A) \mathrm{d}z$；
- $\sigma(e^A) = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$；
- 对任意 $s, t \in \mathbb{R}$，都有 $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$。

Proof. (1) 设 $f(z) = e^z$ 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数，因此由算子演算知道 $f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} e^z R(z, A) \mathrm{d}z$，所以只需要证明 $f(A) = e^A$，在算子范数的意义下：e^A 是绝对收敛的，从而 Riemann 积分的换序成立

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} e^z R(z, A) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} R(z, A) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|z|=r} \frac{z^k}{k!} R(z, A) \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = e^A$$

(2) 根据全纯函数和谱运算的交换性，应用 (1)，得到 $\sigma(e^A) = \sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$；

(3) 根据 (1)，根据 Dunford 积分运算，同样可以定义 $e^{(s+t)z}, e^{sz} e^{tz}$ 是全纯函数，所以

$$e^{(s+t)A} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} e^{(s+t)z} R(z, A) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} e^{sz} e^{tz} R(z, A) \mathrm{d}z = e^{sA} e^{tA}$$

这里的 r 足够大即可。 □