7 第二十七次作业

27.1：证明 Hilbert 伴随算子的性质：假设 X, Y, Z 是复 Hilbert 空间，$A \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X;Y)$, $B \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(Y;Z)$，则

- $A^* \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(Y;X)$ 且 $\|A^*\| = \|A\|$；
- $(BA)^* = A^*B^*$, $(\lambda \mathrm{id})^* = \overline{\lambda}\mathrm{id}$；
- $\ker(A^*) = \mathrm{Ran}(A)^{\perp}$, $\overline{\mathrm{Ran}(A^*)} = \ker(A)^{\perp}$；
- $\mathrm{Ran}(A)$ 闭，当且仅当 $\mathrm{Ran}(A^*)$ 闭；
- $A^{**} = A$；
- 如果 A 是双射，那么 A^* 是双射，且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$；
- 如果 A 是等距同构，则 A^* 是等距同构；
- 如果 A 是紧的，则 A^* 是紧的；
- 如果 A 是 Fredholm，则 A^* 是 Fredholm，从而 $\mathrm{index}(A^*) + \mathrm{index}(A) = 0$。

Proof. (1) $(Ax, y + \alpha\tilde{y}) = (x, A^*(y + \alpha\tilde{y})) = (Ax, y) + \overline{\alpha}(Ax, \tilde{y}) = (x, A^*y) + (x, \alpha A^*\tilde{y}) = (x, A^*y + \alpha A^*\tilde{y})$，由任意性说明 A^* 是复线性算子；考虑 $|(Ax, y)| = |(x, A^*y)| \le \|x\|\|y\|\|A^*\|$，得到 $\|A\| \le \|A^*\|$，反向同理；

(2) $(x, (BA)^*z) = (BAx, z) = (Ax, B^*z) = (x, A^*B^*z)$，所出现的都是复线性算子，所以运算合法；$(x, (\lambda\mathrm{id})^*\tilde{x}) = (\lambda \mathrm{id} x, \tilde{x}) = \lambda(x, \mathrm{id}\tilde{x}) = (x, \overline{\lambda}\mathrm{id}\tilde{x})$；

(3) $(Ax, y) = (x, A^*y)$，固定 y 变动 x，从左向右推出 $\mathrm{Ran}(A)^{\perp} \subseteq \ker(A^*)$，从右向左推出反向；如果 $x \in \overline{\mathrm{Ran}(A^*)}$，则存在 $\{y_n\} \subseteq Y$ 使得 $A^*y_n \to x$，那么由连续性，对于任意 $\tilde{x} \in \ker(A)^{\perp}$ 有 $(\tilde{x}, x) = (\tilde{x}, A^*y_n) + (\tilde{x}, x - A^*y_n)$，推出 $\overline{\mathrm{Ran}(A^*)} \subseteq \ker(A)^{\perp}$；另一方面假设 $\overline{\mathrm{Ran}(A^*)} \subsetneq \ker(A)^{\perp}$，则对于任意 $x_0 \in \ker(A)^{\perp} \setminus \overline{\mathrm{Ran}(A^*)}$，由凸投影定理，存在 $x_1 \in \overline{\mathrm{Ran}(A^*)}$ 使得 $(x_0 - x_1) \perp \overline{\mathrm{Ran}(A^*)}$，从而 $(A(x_0 - x_1), y) = (x_0 - x_1, A^*y) = 0$ 对任意 $y \in Y$ 成立，说明 $x_0 - x_1 \in \ker A \cap \ker(A)^{\perp} = \{0\}$，与 x_0 的选取矛盾；

(4) $\mathrm{Ran}(A^*_{\mathrm{B}})$ 是 $X^* = \Phi_X(X)$ 的闭子空间，当且仅当任意 Cauchy 列 $\{A^*_{\mathrm{B}}\Phi_Y(y_n)\}$ 都是收敛列，由于 Φ_X 是等距同构，所以任意 Cauchy 列 $\{A^*_{\mathrm{H}}y_n\}$ 都是收敛列，当且仅当 $\mathrm{Ran}(A^*)$ 是 X 的闭子空间。所以，根据 Banach 空间闭像集定理得证；

(5) $(Ax, y) = (x, A^*y) = \overline{(A^*y, x)} = \overline{(y, A^{**}x)} = (A^{**}x, y)$；

(6-8) 都是从 Banach 对偶算子迁移而来的性质，等距同构不影响性质：$A^* = \Phi_X^{-1} \circ A^*_{\mathrm{B}} \circ \Phi_Y$；

(9) 回忆 $\mathrm{ind}(A) = \dim\ker(A) - \dim(Y/\mathrm{Ran}A)$，而等距同构依旧不改变两项的维数。 □

27.2：设 H 是非零复 Hilbert 空间，$A : H \to H$ 为正规算子，证明：

- 对任意 $\lambda \in \sigma(A)$ 有 $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$，这当且仅当对任意 $x \in H$ 有 $\mathrm{Re}\,\langle x, Ax\rangle \geq 0$；
- $\sup_{\|x\|=1} \mathrm{Re}\langle x, Ax\rangle = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \mathrm{Re}\,\lambda$, $\inf_{\|x\|=1} \mathrm{Re}\,\langle x, Ax\rangle = \inf_{\lambda\in\sigma(A)} \mathrm{Re}\,\lambda$；
- $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$ 等价于 $A + A^*$ 是双射；
- $\sigma(A + A^*) = \{\lambda + \overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$；
- A 是正规算子的假设在上述结论中不能去掉。

Proof. (1) 对任意 $\lambda \in \sigma(A)$ 有 $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$，这等价于说对任意 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ 都有 $\lambda I - A$ 为有界线性双射。因此对于充分性，如果 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$，则

$$\mathrm{Re}(x, (A - \lambda I)x) = \mathrm{Re}(x, Ax) - \mathrm{Re}(x, \lambda x) = \mathrm{Re}(x, Ax) - \mathrm{Re}\,\lambda \cdot \mathrm{Re}(x, x) \geq -\mathrm{Re}\,\lambda \cdot \mathrm{Re}(x, x) \geq 0$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式推出 $\|x\| \cdot \|(A - \lambda I)x\| \geq \mathrm{Re}(x, (A - \lambda I)x)$。联立两个式子得到 $\|(A - \lambda I)x\| \geq -\mathrm{Re}\,\lambda\|x\|$。这指出 $A - \lambda I$ 是单射，同时也说明 $\mathrm{Ran}(A - \lambda I)$ 是闭的（因为 H 是完备的），则 $\ker(A^* - \overline{\lambda}I) = \mathrm{Ran}(A - \lambda I)^\perp$。将上面的推导过程改成 $\overline{\lambda}$ 和 A^*，仍然有 $\mathrm{Re}\overline{\lambda} < 0$，并且 $\mathrm{Re}(x, Ax) = \mathrm{Re}(A^*x, x) = \mathrm{Re}(x, A^*x) \geq 0$，所以能推出 $\ker(A^* - \overline{\lambda}I) = 0$，这说明 $\mathrm{Ran}(A - \lambda I) = 0^\perp = H$ 是满射，从而 $\lambda I - A$ 是有界线性双射。

反过来，对于必要性，考虑算子演算 e^{-tA}，其中 $t \geq 0$。首先由谱映射定理 $\sigma(e^{-tA}) = e^{-t\sigma(A)}$，所以 e^{-tA} 的谱的模长不超过 1，然后由正规算子的谱半径公式推出 $\|e^{-tA}\| \leq 1$。考虑映射 $t \mapsto (e^{-tA}x, e^{-tA}x)$，展开求导

$$\frac{\mathrm{d}\|e^{-tA}x\|^2}{\mathrm{d}t} = \lim_{t_0\to 0} \frac{(e^{-(t+t_0)A}x, (e^{-(t+t_0)A} - e^{-tA})x) + ((e^{-(t+t_0)A} - e^{-tA})x, e^{-tA}x)}{t_0} = -(e^{-tA}x, Ax) - (Ax, e^{-tA}x)$$

取 $t = 0$ 时，右侧就是 $-2\mathrm{Re}(x, Ax)$，左侧因为满足 $\|e^{-tA}x\| \leq \|e^{-tA}\|\|x\| \leq \|x\|$，所以可见 $t = 0$ 是极大值点，所以此时取非正值，因此 $\mathrm{Re}(x, Ax) \geq 0$。

(2) 设 $\inf_{\lambda\in\sigma(A)} \mathrm{Re}\,\lambda = m$, $\inf_{\|x\|=1} \mathrm{Re}(x, Ax) = M$。首先由谱映射定理，$\sigma(A + hI) = \sigma(A) + h$ 只不过是对谱做了平移。因此根据 (1) 我们由 $\mathrm{Re}(\lambda - m) \geq 0$ 推出 $\mathrm{Re}(x, (A - mI)x) \geq 0$，从而 $\mathrm{Re}(x, Ax) \geq m$，说明 $M \geq m$；反过来由 $\mathrm{Re}(x, (A - MI)x) \geq 0$ 推出 $\mathrm{Re}(\lambda - M) \geq 0$，这说明 $m \geq M$，从而 $M = m$。另一个式子是同样的处理思路。

(3) 充分性，如果 $A + A^*$ 是双射，那么由开映射定理，推出存在 $c > 0$ 使得 $\|(A + A^*)x\| \geq c\|x\|$，进一步

$$2\|Ax\| = \|Ax\| + \|A^*x\| \geq \|(A + A^*)x\| \geq c\|x\|$$

这推出 A 是单射且像集为闭，则同理对 A^* 处理，推出 $\mathrm{Ran}(A)^\perp = \ker A^* = \{0\}$，所以 A 是双射。特别地，将 A 换为 $\lambda iI + A$，$(\lambda iI + A) + (\lambda iI + A)^* = A + A^*$ 是双射，从而 $\lambda iI + A$ 也是双射，这对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立。

必要性，因为 $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$，所以 $\sigma(A)$ 在复平面上被分为两个不交半平面 U_-, U_+，从而定义投影算子，得到谱投影分解空间 $H_- \oplus H_+ = H$，这是 A 的不变子空间，使得 $\{\pm\mathrm{Re}\lambda > 0\} \subset \sigma(A|_{H_\pm})$。事实上，由 (2) 知道，限制在 $H_\pm$ 上：

$$\sup_{\sigma(A^*|_{H_\pm})} \mathrm{Re}\,\lambda = \sup_{\|x\|=1} \mathrm{Re}(x, A^*|_{H_\pm}x) = \sup_{\|x\|=1} \mathrm{Re}(x, A|_{H_\pm}x) = \sup_{\sigma(A|_{H_\pm})} \mathrm{Re}\,\lambda$$

同理对 inf 也是，所以 A^* 的谱在 $H_\pm$ 上也是根据正负号被划分开。此时 $(A + A^*)_{H_\pm} = A|_{H_\pm} + A^*|_{H_\pm}$。因为谱是紧集，所以存在 $c > 0$ 使得在 H_+ 中

$$\|x\|\|(A + A^*)|_{H_+}x\| \geq 2\inf_{x\in H_+} \mathrm{Re}(x, A|_{H_+}x) = 2\|x\|^2 \inf_{\lambda\in\sigma(A|_{H_+})} \mathrm{Re}\,\lambda = 2c\|x\|^2 > 0$$

同之前题目中的分析，可以得到 $(A + A^*)|_{H^+}$ 是双射，所以直和拼接起来后 $A + A^*$ 是 H 的双射。

(4) 首先对于自伴算子 $\sigma(A + A^*) \subset \mathbb{R}$，然后对算子 $A - \mu I$ 其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 使用 (3) 中的结论，得到：$2\mu I - (A + A^*) = (\mu I - A) + (\mu I - A)^*$ 是双射，当且仅当 $\sigma(\mu I - A) = \mu - \sigma(A)$ 满足 $(\sigma(A) - \mu) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$，当且仅当 $\mu + \beta i \notin \sigma(A)$ 对任意 $\beta \in \mathbb{R}$。反过来叙述就是 (4) 的结论。

(5) 如果 A 不是正规算子，那么 (1)-(4) 有反例。取 A 为 2 阶的 Jordan 块 $J(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\sigma(A) = \{0\}$，在 (1) 中选取 $x = (1, -1)$ 到处矛盾；在 (2) 中同样到处矛盾（否则 $\mathrm{Re}(x, Ax) \equiv 0$）；在 (3) 中 $A + A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是双射，矛盾；在 (4) 中 $\sigma(A + A^*) = \{\pm 1\} \neq \{0\}$，矛盾。 □